Intelligens elosztott rendszerek

Információfúzió

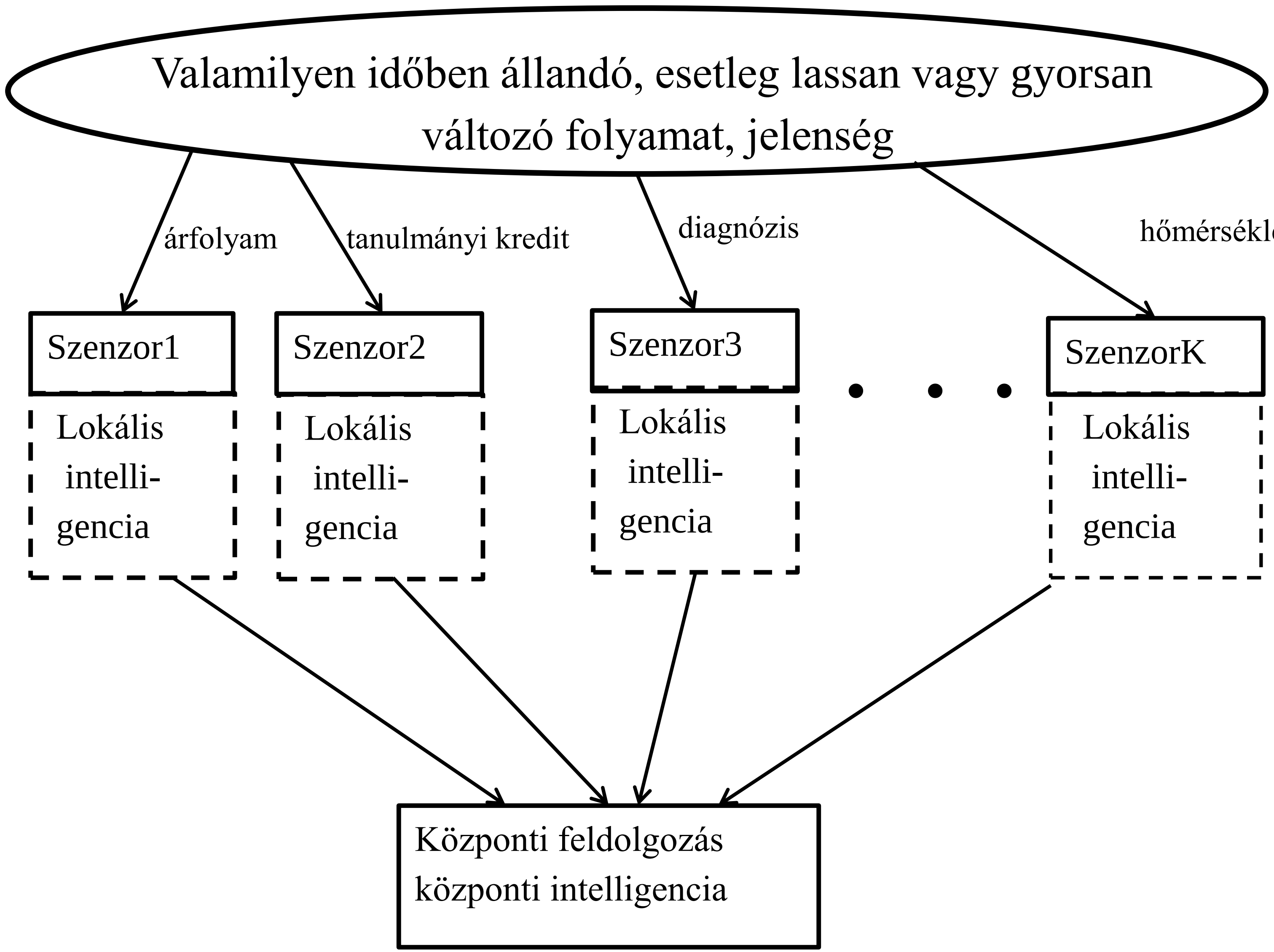
(valószínűségi alapon, Dempster-Shafer elmélet alapján)

Pataki Béla

BME I.E. 414, 463-26-79

pataki@mit.bme.hu,

http://www.mit.bme.hu/general/staff/pataki



Valamilyen időben állandó, esetleg lassan vagy gyorsan változó folyamat, jelenség
árfolyam
tanulmányi kredit
diagnózis
hőmérséklet
Szenzor1
Szenzor2
Szenzor3
SzenzorK
Lokális intelli-gencia
Lokális intelli-gencia
Lokális intelli-gencia
Lokális intelli-gencia
Központi feldolgozás
központi intelligencia

Az **információfúzió** természetes paradigma

Az élőlények is különböző szenzorokkal rendelkeznek, és az egyes szenzoraikból nyert információt fuzionálják.

- látás (2 szemünkből nyert infó $\rightarrow$ 3D-s kép),
- hallás (2 fülünkből nyert infó $\rightarrow$ sztereó hallás),
- látás+hallás (2 szem+2 fül: még jobb 3D-s érzékelés)
- szaglás,
- tapintás,
- ízlelés…

Egy dolgot egyszerre látunk, hallunk, tapintunk, szagolunk – így alakul ki egy gazdag modell az agyunkban. ($\Rightarrow$ez egy nagy adag, finom, meleg birkapörkölt… vagy egy gyanús, erős, ellenség… vagy barátom/barátnőm… vagy tőzsdekrach)

Műszaki: elsősorban – de nem kizárólagosan – térbeli kiterjedéssel rendelkező problémáknál több szenzor jelét fuzionáljuk, így alkotunk modellt.

Fúzió valószínűségi alapon

Egy Ω eseményhalmazban az elemi eseményeket A_i-vel jelölve:

$$p(A_i) \in [0,1] \quad \text{minden } A_i \in \Omega$$

$$\sum_{A_i \in \Omega} p(A_i) = 1$$

Amiket felhasználunk:
Bayes-tétel (két, illetve három változóra):

$$\boxed{\begin{aligned} p(A,B) &= p(A|B)\cdot p(B) = p(B|A)\cdot p(A) \\ p(A|B) &= \frac{p(B|A)\cdot p(A)}{p(B)} \end{aligned}}$$

$$p(A,B,C) = p(A|B,C)\cdot p(B|C)\cdot p(C) = p(B|A,C)\cdot p(A|C)\cdot p(C)$$

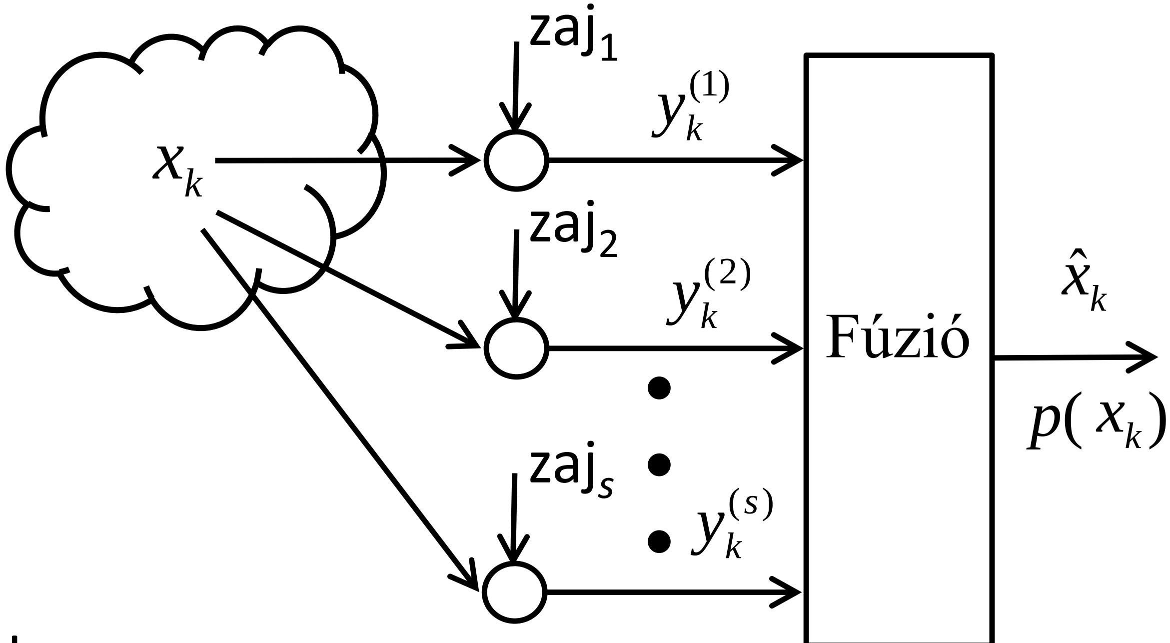
$$p(A|B,C) = \frac{p(B|A,C)\cdot p(A|C)}{p(B|C)}$$

Chapman-Kolmogorov:

$$\boxed{p(A|B) = \sum_{x_k} p(A|x_k)\cdot p(x_k|B)}$$

Fúzió valószínűségi alapon

A k-adik időpillanatban a keresett érték. (Az egyszerűség kedvéért skalár esetet tárgyalunk, lehetne $\mathbf{x}_k$ egy sor x_{kj} állapotváltozóból álló vektor is.)



Feltételezéseink:

- A mért értékek ($y_k^{(s)}$) csak a pillanatnyi x_k-tól függnek
- A zajok függetlenek időben önmaguktól
- A különböző szenzorok zajai egymástól is függetlenek

Fúzió valószínűségi alapon

Egy szenzor időbeli jelsorozatának fúziója

A *k*-adik időpillanatban a keresett érték x_k , az *s*-dik szenzor által mért értékek sorozata $\mathbf{Y}_k^{(s)} = \left[y_1^{(s)}, y_2^{(s)}, \ldots, y_k^{(s)} \right]$.

A Bayes szabály alapján:

$$p(x_k \mid \mathbf{Y}_k^{(s)}) = \frac{p(\mathbf{Y}_k^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k)}{p(\mathbf{Y}_k^{(s)})} = \frac{p(y_k^{(s)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k)}{p(y_k^{(s)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}$$

$$p(x_k \mid \mathbf{Y}_k^{(s)}) = p(x_k \mid y_k^{(s)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) \cdot p(x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})} = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) \cdot p(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) \cdot p(\mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) \cdot p(\mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})} =$$

$$= \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) \cdot p(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})} = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}$$

Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy az egyes időpillanatbeli méréseket egymástól függetlennek tekintjük: x_k minden megadható információt biztosít $y_k^{(s)}$-re nézve, a megelőző mérésekre nincs szükség.

$$p(x_k \mid \mathbf{Y}_k^{(s)}) = p(x_k \mid y_k^{(s)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) \cdot p(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})} = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}$$

A számláló második tényezője: $p(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)}) = \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})$

Rekurzív összefüggésre jutunk:

$$p(x_k \mid \mathbf{Y}_k^{(s)}) = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{p(y_k^{(s)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}$$

A nevezőt általában normálásra használjuk: a valószínűségek összege legyen 1.

$$p(y_k^{(s)} \mid Y_{k-1}^{(s)}) = \sum_{x_k} p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k \mid Y_{k-1}^{(s)})$$

$$\sum_{x_k} p(x_k \mid Y_{k-1}^{(s)}) = \sum_{x_k} \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k \mid Y_{k-1}^{(s)})}{\sum_{x_k} p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot p(x_k \mid Y_{k-1}^{(s)})} = 1.$$

Több szenzor jelének fúziója (az egyszerűség kedvéért 2 szenzorra bemutatva)

$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = p\left(x_k \middle| y_k^{(1)}, y_k^{(2)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right) = \frac{p\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)} \middle| x_k, Y_{k-1,}^{(1)} Y_{k-1}^{(2)}\right) p\left(x_k \mid Y_{k-1,}^{(1)} Y_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}$$

$$p(A \mid B, C) = \frac{p(B \mid A, C) \cdot p(A \mid C)}{p(B \mid C)}$$

Feltesszük, hogy a két mérés $y_k^{(1)}, y_k^{(2)}$ egymástól független:

$$p\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)} \middle| x_k, Y_{k-1,}^{(1)} Y_{k-1}^{(2)}\right) = p\left(y_k^{(1)} \middle| x_k, Y_{k-1,}^{(1)}\right) \cdot p\left(y_k^{(2)} \middle| x_k, Y_{k-1}^{(2)}\right)$$

$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = \frac{p\left(y_k^{(1)} \middle| x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right) \cdot p\left(y_k^{(2)} \middle| x_k, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right) \cdot p\left(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}$$

$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = \frac{p\left(x_k \middle| y_k^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right) \cdot p\left(y_k^{(1)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right)}{p\left(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right)} \cdot \frac{p\left(x_k \middle| y_k^{(2)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right) \cdot p\left(y_k^{(2)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)} \cdot \frac{p\left(x_k \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(y_k^{(1)}, y_k^{(2)} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}, \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}$$

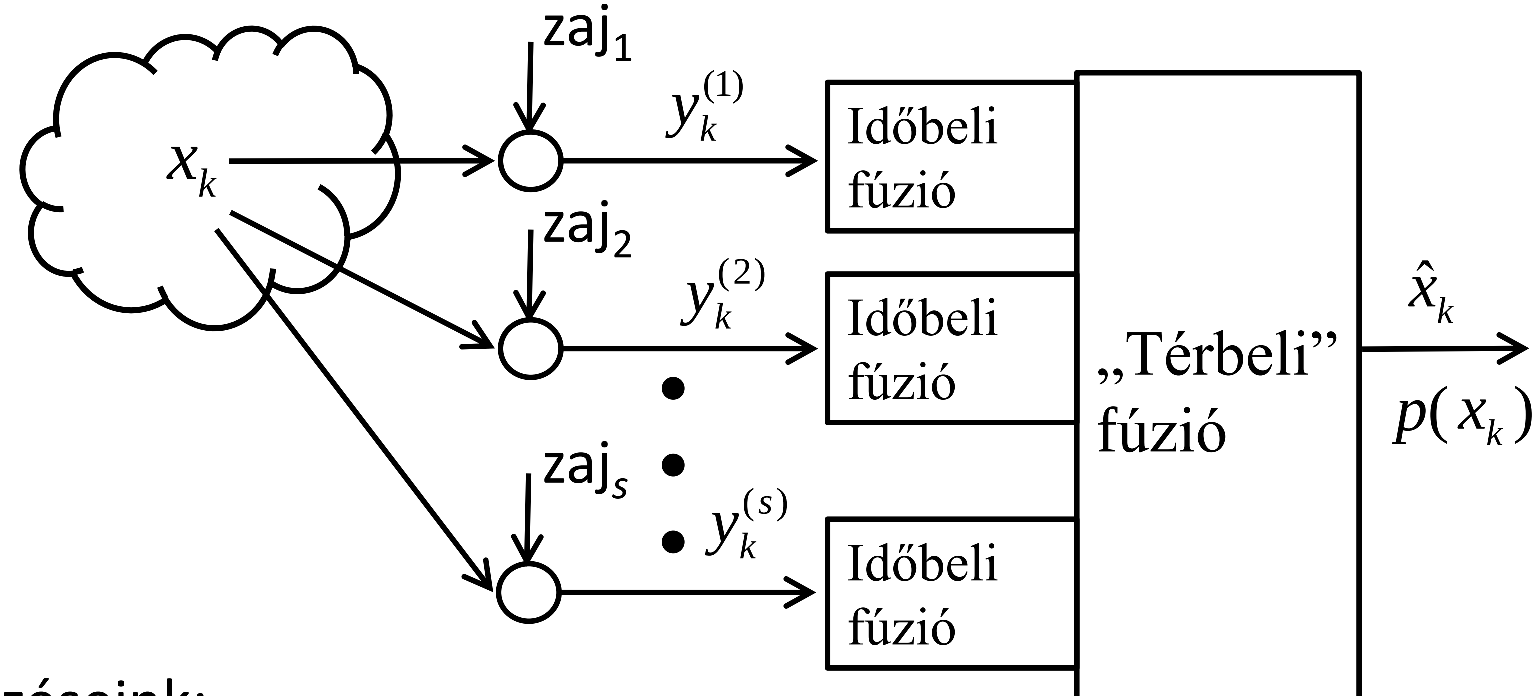
$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = \frac{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1,}^{(1)} \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)} \cdot \frac{1}{Normálás}$$

Megint rekurzív összefüggésre jutunk, ha alkalmazzuk:

$$p\left(x_k \middle| Y_{k-1,}^{(1)} Y_{k-1}^{(2)}\right) = \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p\left(x_{k-1} \middle| Y_{k-1,}^{(1)} Y_{k-1}^{(2)}\right)$$

Fúzió valószínűségi alapon

Most kétfele vágtuk a problémát – egy-egy szenzor időbeli információinak fúziójára és a több szenzor által adott információ fúziójára. (*Szenvedélyünk a dekompozíció!*)



Feltételezéseink:

- A mért értékek ($y_k^{(s)}$) csak a pillanatnyi x_k-tól függnek
- A zajok függetlenek időben önmaguktól
- A különböző szenzorok zajai egymástól is függetlenek

Demópélda (Challa-Koks, 2004)

Szenzormodellek:

Szenzor1	**LearJet (J)**	**Falcon (F)**	**Caravan (C)**
Nagyon Gyors (NGy)	0,72	0,3	0,02
Gyors (Gy)	0,2	0,6	0,3
Lassú (L)	0,08	0,1	0,68

Szenzor2	**LearJet (J)**	**Falcon (F)**	**Caravan (C)**
Nagyon Gyors (NGy)	0,8	0,3	0,3
Gyors (Gy)	0,1	0,6	0,3
Lassú (L)	0,1	0,1	0,4

Kezdeti értékek:

Szenzor1

$$p(J\,|\,Y_0^{(1)}) = 0,4$$
$$p(F\,|\,Y_0^{(1)}) = 0,4$$
$$p(C\,|\,Y_0^{(1)}) = 0,2$$

Szenzor2

$$p(J\,|\,Y_0^{(1)}) = 0,6$$
$$p(F\,|\,Y_0^{(1)}) = 0,3$$
$$p(C\,|\,Y_0^{(1)}) = 0,1$$

A fúziós rekurzív eljárás kezdeti értékei:

$$p(J\,|\,Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,5 \qquad p(F\,|\,Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,4 \qquad p(C\,|\,Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,1$$

Észlelések a *k*=1 időpontban: $y_1^{(1)} = NGY$ $\qquad y_1^{(2)} = NGY$

A két összefüggést alkalmazzuk

1. *k*-adik időpillanat, *s*-edik szenzor (*s*=1,2)

$$p(x_k \mid \mathbf{Y}_k^{(s)}) = \frac{p(y_k^{(s)} \mid x_k) \cdot \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p(x_{k-1} \mid \mathbf{Y}_{k-1}^{(s)})}{Norm_k^{(s)}}$$

2. A két szenzor információjának fúziója a *k*-adik időpillanatban

$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = \frac{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) \cdot \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p\left(x_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_{k-1,}^{(1)} \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)} \cdot \frac{1}{Norm_k^{(1,2)}}$$

Mi lesz itt az x_k és mi lesz itt az $y_k^{(s)}$?

k=1 időpillanat, s=1 szenzor

$$p(x_1 \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{p(y_1^{(1)} \mid x_1) \cdot \sum_{x_0} p(x_1 \mid x_0) \cdot p(x_0 \mid \mathbf{Y}_0^{(1)})}{Norm_1^{(1)}}$$

Szenzor1	**LearJet (J)**	**Falcon (F)**	**Caravan (C)**
Nagyon Gyors (NGy)	0,72	0,3	0,02
Gyors (Gy)	0,2	0,6	0,3
Lassú (L)	0,08	0,1	0,68

$$p(J \mid Y_0^{(1)}) = 0,4$$
$$p(F \mid Y_0^{(1)}) = 0,4$$
$$p(C \mid Y_0^{(1)}) = 0,2$$

$$y_1^{(1)} = NGY$$

$$p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{p(y_1^{(1)} = NGy \mid x_1 = J) \cdot \left(p(x_1 = J \mid x_0 = J) \cdot p(x_0 = J \mid \mathbf{Y}_0^{(1)}) \right)}{Norm_1^{(1)}} = \frac{0,72 \cdot (1 \cdot 0,4)}{Norm_1^{(1)}} = \frac{0,288}{Norm_1^{(1)}}$$

$$p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{p(y_1^{(1)} = NGy \mid x_1 = F) \cdot \left(p(x_1 = F \mid x_0 = F) \cdot p(x_0 = F \mid \mathbf{Y}_0^{(1)}) \right)}{Norm_1^{(1)}} = \frac{0,3 \cdot (1 \cdot 0,4)}{Norm_1^{(1)}} = \frac{0,12}{Norm_1^{(1)}}$$

$$p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{p(y_1^{(1)} = NGy \mid x_1 = C) \cdot \left(p(x_1 = C \mid x_0 = C) \cdot p(x_0 = C \mid \mathbf{Y}_0^{(1)}) \right)}{Norm_1^{(1)}} = \frac{0,02 \cdot (1 \cdot 0,2)}{Norm_1^{(1)}} = \frac{0,004}{Norm_1^{(1)}}$$

$$p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{0,288}{0,288 + 0,12 + 0,004} = \frac{0,288}{0,412} \cong 0,7 \qquad p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{0,12}{0,412} \cong 0,29 \;\; ; \;\; p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = \frac{0,004}{0,412} \cong 0,01$$

k=1 időpillanat, s=2 szenzor

$$p(x_1 \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = \frac{p(y_1^{(2)} \mid x_1) \cdot \sum_{x_0} p(x_1 \mid x_0) \cdot p(x_0 \mid \mathbf{Y}_0^{(2)})}{Norm_1^{(2)}}$$

Szenzor2	**LearJet (J)**	**Falcon (F)**	**Caravan (C)**
Nagyon Gyors (NGy)	0,8	0,3	0,3
Gyors (Gy)	0,1	0,6	0,3
Lassú (L)	0,1	0,1	0,4

$$p(J \mid Y_0^{(2)}) = 0,6$$

$$p(F \mid Y_0^{(2)}) = 0,3$$

$$p(C \mid Y_0^{(2)}) = 0,1$$

$$y_1^{(2)} = NGY$$

$$p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = \frac{0,6 \cdot (1 \cdot 0,8)}{Norm_1^{(2)}} = \frac{0,48}{0,6} = 0,8$$

$$p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = \frac{0,3 \cdot (1 \cdot 0,3)}{Norm_1^{(2)}} = \frac{0,09}{0,6} = 0,15$$

$$Norm_1^{(2)} = 0,48 + 0,09 + 0,03 = 0,6$$

$$p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = \frac{0,1 \cdot (1 \cdot 0,3)}{Norm_1^{(2)}} = \frac{0,03}{0,6} = 0,05$$

A két szenzor információjának fúziója a k=1 időpillanatban

$p(J \mid Y_0^{(1)}) = 0,4$ $\quad$ $p(J \mid Y_0^{(1)}) = 0,6$

$p(F \mid Y_0^{(1)}) = 0,4$ $\quad$ $p(F \mid Y_0^{(1)}) = 0,3$

$p(C \mid Y_0^{(1)}) = 0,2$ $\quad$ $p(C \mid Y_0^{(1)}) = 0,1$

$p(J \mid Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,5$ $\quad$ $p(F \mid Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,4$ $\quad$ $p(C \mid Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,1$

$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = \frac{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) \cdot \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p\left(x_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_{k-1,}^{(1)} \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)} \cdot \frac{1}{Norm_k^{(1,2)}}$$

$$p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}\right) \cdot p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) \cdot \left(p(x_k = J \mid x_{k-1} = L) \cdot p\left(x_{k-1} = J \middle| \mathbf{Y}_{0,}^{(1)} \mathbf{Y}_0^{(2)}\right)\right)}{p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_0^{(1)}\right) \cdot p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_0^{(2)}\right)} \cdot \frac{1}{Norm_1^{(1,2)}}$$

$$p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,5}{0,4 \cdot 0,6} \cdot \frac{1}{Norm_1^{(1,2)}} = \frac{1,167}{Norm_1^{(1,2)}}$$

$p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = 0,7$

$p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = 0,8$

$$p\left(x_1 = C \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{0,29 \cdot 0,15 \cdot 0,4}{0,4 \cdot 0,3} \cdot \frac{1}{Norm_1^{(1,2)}} = \frac{0,145}{Norm_1^{(1,2)}}$$

$p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = 0,29$

$p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = 0,15$

$$p\left(x_1 = C \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{0,01 \cdot 0,05 \cdot 0,1}{0,2 \cdot 0,1} \cdot \frac{1}{Norm_1^{(1,2)}} = \frac{0,0025}{Norm_1^{(1,2)}}$$

$p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = 0,01$

$p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = 0,05$

A két szenzor információjának fúziója a k=1 időpillanatban

$$p(J \mid Y_0^{(1)}) = 0,4 \qquad p(J \mid Y_0^{(1)}) = 0,6$$

$$p(F \mid Y_0^{(1)}) = 0,4 \qquad p(F \mid Y_0^{(1)}) = 0,3$$

$$p(C \mid Y_0^{(1)}) = 0,2 \qquad p(C \mid Y_0^{(1)}) = 0,1$$

$$p(J \mid Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,5 \qquad p(F \mid Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,4 \qquad p(C \mid Y_0^{(1)}, Y_0^{(2)}) = 0,1$$

$$p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}, \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) = \frac{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_k^{(2)}\right) \cdot \sum_{x_{k-1}} p(x_k \mid x_{k-1}) \cdot p\left(x_{k-1} \middle| \mathbf{Y}_{k-1,}^{(1)} \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)}{p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(1)}\right) \cdot p\left(x_k \middle| \mathbf{Y}_{k-1}^{(2)}\right)} \cdot \frac{1}{Norm_k^{(1,2)}}$$

$$Norm_1^{(1,2)} = 1,1667 + 0,145 + 0,0025 = 1,3142$$

$$p\left(x_1 = J \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{1,1667}{1,3142} \cong 0,888$$

$$p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = 0,7 \qquad p(x_1 = J \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = 0,8$$

$$p\left(x_1 = F \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{0,145}{1,3142} \cong 0,110$$

$$p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = 0,29 \qquad p(x_1 = F \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = 0,15$$

$$p\left(x_1 = C \middle| \mathbf{Y}_1^{(1)}, \mathbf{Y}_1^{(2)}\right) = \frac{0,0025}{1,3142} \cong 0,002$$

$$p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(1)}) = 0,01 \qquad p(x_1 = C \mid \mathbf{Y}_1^{(2)}) = 0,05$$

Régebbi zh (vagy vizsga?) feladat:

Egy rendszer állapotának időbeli alakulását akarjuk megbecsülni egy elosztott szenzorrendszerrel. A rendszernek 2 állapota van: helyes működés (M), illetve hibás működés (H).
Az egyik szenzor egy j bináris (0 vagy 1) jelet mér, és a szenzorba épített egyszerű lokális intelligencia valószínűségi (Bayes) alapon becsüli a szenzor által a k-adik pillanatban a központ fele küldött állapotvalószínűségeket. Az előzetes ismeretek alapján:

$$p(x_k = M \mid x_{k-1} = M) = 0,99 \qquad p(x_k = H \mid x_{k-1} = H) = 0,88$$

$$p(j_k = 1 \mid x_k = M) = 0,7 \qquad p(j_k = 1 \mid x_k = H) = 0,2$$

Az előző időpontban a szenzor a következő állapotvalószínűségeket határozta meg, és küldte el a központi feldolgozásnak (nyilván elég lenne az egyiket megadni, csak egy kis segítség, hogy kevesebbet kelljen gondolkozni):

$$p(x_{k-1} = M) = 0,9 \qquad p(x_{k-1} = H) = 0,1$$

Mekkora valószínűséget fog a lokális feldolgozás a helyes működésnek (M), és mekkorát a hibásnak (H) adni, ha a szenzorunk a k-adik időpillanatban j_k=1-et mért?

Számos próbálkozás van a bizonytalanság alternatív (nem valószínűségi) kezelésére:

- fuzzy
- Dempster-Shafer
- stb.

A D-Sh-t mutatjuk be, több érdekes gondolat vehető le belőle

Dempster-Shafer fúzió

A valószínűségeket az elemi események felett értelmeztük. Pl. A, B , C

elemi események (kölcsönösen kizárják egymást) P(A)+P(B)+P(C)=1.

A Dempster-Shafer modellben az események hatványhalmazán értelmezünk egy mértéket: ***mass of probability, mop***. Nem csak az elemi eseményeknek, hanem az összetett eseményeknek is van *mop*-ja.

{0, A, B, C, AB, AC, BC, ABC}

Az ABC összetett esemény az *ismerethiány* – ez talán a legnagyobb újítás (= fogalmunk sincs , Unknown, Ignorance, Θ).

A fúziós szabály:

$$m^{(1,2)}(Z) = \frac{\sum_{X \cap Y = Z} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)}{1 - \sum_{X \cap Y = 0} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)} = \frac{\sum_{X \cap Y = Z} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)}{\sum_{X \cap Y \neq 0} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)}$$

Előző demópélda Dempster-Shafer alapon. A két szenzor most az összes modellezett eseményre megadja a szerinte érvényes mop-ot.

mop	**Szenzor1**	**Szenzor2**
LearJet (J)	0,3	0,4
Falcon (F)	0,15	0,1
Caravan (C)	0,03	0,02
GyorsGép (J v F vagy {J,F} jelölés)	0,42	0,45
Ismeretlen (Θ, J v F v C vagy {J,F,C})	0,1	0,03

Dempster-Shafer információfúziós példa

Például a fúzió után a J esemény (megfigyelt eszköz: LearJet) eredő mop értéke:

$$m^{(1,2)}(Z)=\frac{\sum_{X\cap Y=Z} m^{(1)}(X)\cdot m^{(2)}(Y)}{1-\sum_{X\cap Y=0} m^{(1)}(X)\cdot m^{(2)}(Y)}=\frac{\sum_{X\cap Y=Z} m^{(1)}(X)\cdot m^{(2)}(Y)}{\sum_{X\cap Y\neq 0} m^{(1)}(X)\cdot m^{(2)}(Y)}$$ - ből

$$m^{(1,2)}(J)=\frac{m^{(1)}(J)\cdot\left[m^{(2)}(J)+m^{(2)}(\{J,F\})+m^{(2)}(\{J,F,C\})\right]+m^{(2)}(J)\left[m^{(1)}(\{J,F\})+m^{(1)}(\{J,F,C\})\right]}{Nevez\H{o}}$$

$$Nevez\H{o}=1-\left[m^{(1)}(J)\cdot m^{(2)}(F)+m^{(1)}(J)\cdot m^{(2)}(C)+m^{(1)}(F)\cdot m^{(2)}(J)+m^{(1)}(F)\cdot m^{(2)}(C)+\ldots\right.$$
$$\left.+m^{(1)}(C)\cdot m^{(2)}(J)+m^{(1)}(C)\cdot m^{(2)}(F)+m^{(1)}(C)\cdot m^{(2)}(\{J,F\})+m^{(1)}(\{J,F\})\cdot m^{(2)}(C)\right]$$

Például az Θ={J,F,C} esemény eredő mop értéke:

$$m^{(1,2)}(\{J,F,C\})=\frac{m^{(1)}(\{J,F,C\})\cdot m^{(2)}(\{J,F,C\})}{Nevez\H{o}}$$

Dempster-Shafer következtetés problémája

Probléma merül fel, ha **ellentmondás** van a megfigyelésekben.
Tipikus példa: 3 eseményünk van és 2 megfigyelőnk, amelyek a következő mop-okat adják.

mop	A	B	C	{A,B,C}	1-nevező (konfl. , 0)	nevező	Σ
S1 mop$^{(1)}$	0,99	0,01	0	0			1
S2 mop$^{(2)}$	0	0,01	0,99	0			1
Fuzionált mop$^{(1,2)}$ számláló	0	0,0001	0	0	0,9999	0,0001	1
Fuzionált mop$^{(1,2)}$	0	1	0	0			

Az *eredmény* nyilvánvalóan *nem józan*. Yager: a probléma az, hogy a fúziós összefüggés normálásából (nevező) kizártuk a konfliktust!

$$m^{(1,2)}(Z) = \frac{\sum\limits_{X \cap Y = Z} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)}{1 - \sum\limits_{X \cap Y = 0} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)} = \frac{\sum\limits_{X \cap Y = Z} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)}{\sum\limits_{X \cap Y \neq 0} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y)}$$

Yager fúzió

Használjuk csak a számlálót, és ne zárjuk ki a konfliktusokat a nevezőből. (*ground mass of probability, gMop*)

$$q(Z) = \sum_{X \cap Y = Z} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y) \qquad Z \subset \Theta \quad Z \neq 0$$

$$q^{(1,2)}(Z) = q(Z)$$

$$q(0) = \sum_{X \cap Y = 0} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y) \geq 0$$

$$\Theta = \{A, B, C\}$$

$$q(\Theta^*) = m^{(1)}(\Theta) \cdot m^{(2)}(\Theta)$$

$$q^{(1,2)}(\Theta) = q(\Theta^*) + q(0)$$

mop	**A**	**B**	**C**	**Θ**	**0**	**Σ**
S1 mop$^{(1)}$	0,99	0,01	0	0		1
S2 mop$^{(2)}$	0	0,01	0,99	0		1
Fúzionált q	0	0,0001	0	0	0,9999	1
Fúzionált q$^{(1,2)}$	0	0,0001	0	0,9999		1

Inakagi egyesített elmélet

Használjuk csak a számlálót, ne zárjuk ki a konfliktusokat a nevezőből.

$$q(Z) = \sum_{X \cap Y = Z} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y) \qquad Z \subset \Theta, \quad Z \neq 0$$

$$q(\Theta) = m^{(1)}(\Theta) \cdot m^{(2)}(\Theta)$$

$$q(0) = \sum_{X \cap Y = 0} m^{(1)}(X) \cdot m^{(2)}(Y) \geq 0$$

$$m_U^{(1,2)}(Z) = \left[1 + k \cdot q(0)\right] \cdot q(Z) \qquad Z \neq \Theta, Z \neq 0$$

$$m_U^{(1,2)}(\Theta) = \left[1 + k \cdot q(0)\right] \cdot q(\Theta) + \left[1 + k \cdot q(0) - k\right] \cdot q(0)$$

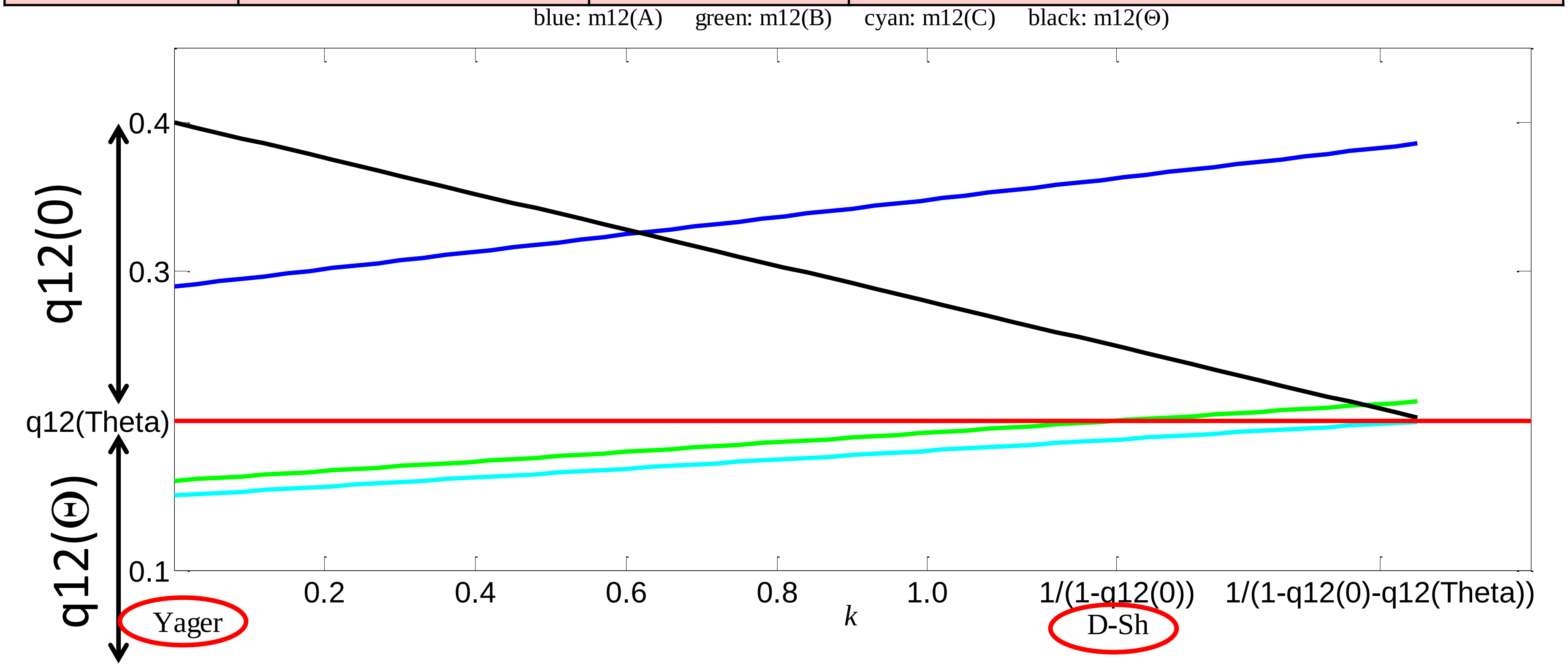
$$0 \leq k \leq \frac{1}{1 - q(0) - q(\Theta)}$$

mop	**A**	**B**	**C**	**Θ**	**0**	**Σ**
S1 mop$^{(1)}$	0,99	0,01	0	0		1
S2 mop$^{(2)}$	0	0,01	0,99	0		1
Fuzionált q	0	0,0001	0	0	0,9999	1
Fuzionált q$^{(1,2)}$	0	0,0001	0	0,9999		1

Inakagi egyesített elmélet

2 szenzor, 3 esemény

Esemény	A	B	C	0, konfliktus	Θ=Ignorance={A, B, C}
$m^{(1)}(\bullet)$	0.2	0.1	0.2		0.5
$m^{(2)}(\bullet)$	0.3	0.2	0.1		0.4
$q(\bullet)$ (Yager)	0.29	0.16	0.15	0.2	0,5·0,4=0,2
$m_u^{(1,2)}(\bullet)$	[1+k·0,2] ·q(•)				[1+k·0,2] ·0,2+[1+k·0,2-k] ·0,2= 0,4-0,12·k



Régebbi zh (vagy vizsga?) feladat:

Egy rendszer Yager fúziós szabállyal egyesíti a két szenzora (s1, s2) által adott mop értékeket. A két lehetséges állapot mellett az ismerethiány (ignorance) állapotot modellezzük, és a két szenzor ezekre a következő mop értékeket küldte a központi feldolgozó egységnek:

Modellezett állapot	**{A}**	**{B}**	**Θ={A,B}**
s1 mop	0,7	0	0,3
s2 mop	0,9	0	0,1

Mekkorák lesznek a fuzionált gmop értékek?